Aufgabe A1 Landesabitur Hessen 2011 LK

Aufgabe 1.1 (8 BE)

$h(t)=2t^2\left(1{,}5-\ln(t)\right)$

t: Zeit in Stunden

h(t): Höhe in 100 Metern

Start des Ballons zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Höhe $h = 0$

Dauer der Ballonfahrt:

$h(t) = 0$

$$\begin{aligned} 2t^2\left(1{,}5-\ln(t)\right) &= 0 \\ 1{,}5-\ln(t) &= 0 \\ \ln(t) &= 1{,}5 \\ t &= e^{1{,}5} \approx 4{,}4817 \end{aligned}$$

Die Ballonfahrt dauert knapp 4,5 Stunden.

Hochpunkt:

$h'(t)=0 \wedge h''(t)<0$

$$\begin{aligned} h'(t) &= \left(1{,}5-\ln(t)\right)\cdot 4t+2t^2\cdot\left(-\frac{1}{t}\right) \\ &= \left(1{,}5-\ln(t)\right)\cdot 4t-2t \\ &= 6t-4t\cdot\ln(t)-2t \\ &= 4t\cdot\left(1-\ln(t)\right) \end{aligned}$$

$$h'(t)=0$$

$$4t\cdot\left(1-\ln(t)\right) = 0$$

$$\begin{aligned} 4t &= 0 & \qquad 1-\ln(t) &= 0 \\ t_1 &= 0 & \ln(t) &= 1 \\ t_1 &\notin D & t_2 &= e \end{aligned}$$

$$h''(e) = -4 \cdot \ln e = -4 < 0$$

$$\begin{aligned} h(e) &= 2 \cdot e^2 \cdot (1{,}5 - \ln e) \\ &= 2 \cdot e^2 \cdot 0{,}5 \\ &= e^2 \approx 7{,}389 \end{aligned}$$

Damit hat der Graph von *h(t)* den Hochpunkt $H(e \mid e^2)$
Die maximale Höhe des Ballons betrug somit ca. 738,9 m

Aufgabe1.2 (9 BE)

Um festzustellen, wann der Ballon am stärksten steigt oder fällt, braucht man die Wendepunkte.

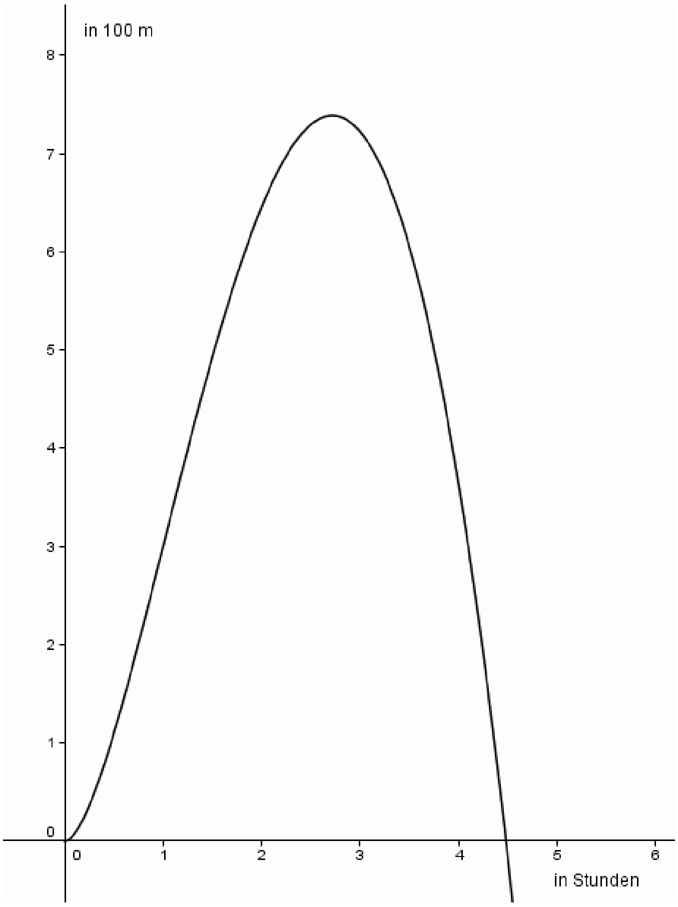
Bedingung für Wendepunkte:

$$h''(t) = 0 \ \wedge \ h'''(t) \neq 0$$

$$\begin{aligned} h''(t) &= 0 \\ -4 \cdot \ln(t) &= 0 \\ \ln(t) &= 0 \\ t &= 1 \quad \wedge \ h'''(1) = -4 \neq 0 \end{aligned}$$

Mit $h(1) = 3$ ergibt sich der Wendepunkt zu $W(1 \mid 3)$

Skizze:



Der Skizze kann man entnehmen, dass der Ballon im Wendepunkt am stärksten steigt. Die größte Sinkgeschwindigkeit wird bei der Landung erreicht. In Zahlen ausgedrückt bedeutet dies:

maximale Steiggeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} h'(1) &= 4 \cdot 1 \cdot \left(1 - \ln(1)\right) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Das entspricht

$$400\,\frac{\text{m}}{\text{h}} = 6,\overline{6}\,\frac{\text{m}}{\text{min}} = 0,\overline{1}\,\frac{\text{m}}{\text{sek}}$$

in der Wirklichkeit.

Für die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt der Landung gilt:

$$h'(e^{1,5}) = 4 \cdot e^{1,5}\left(1 - \ln(e^{1,5})\right)$$
$$= -2 \cdot e^{1,5} \approx -8,963$$

Dies entspricht einer wahren Sinkgeschwindigkeit von $-896,3\frac{m}{h} \approx -0,24\frac{m}{sek}$

Aufgabe 2.1 (5 BE)

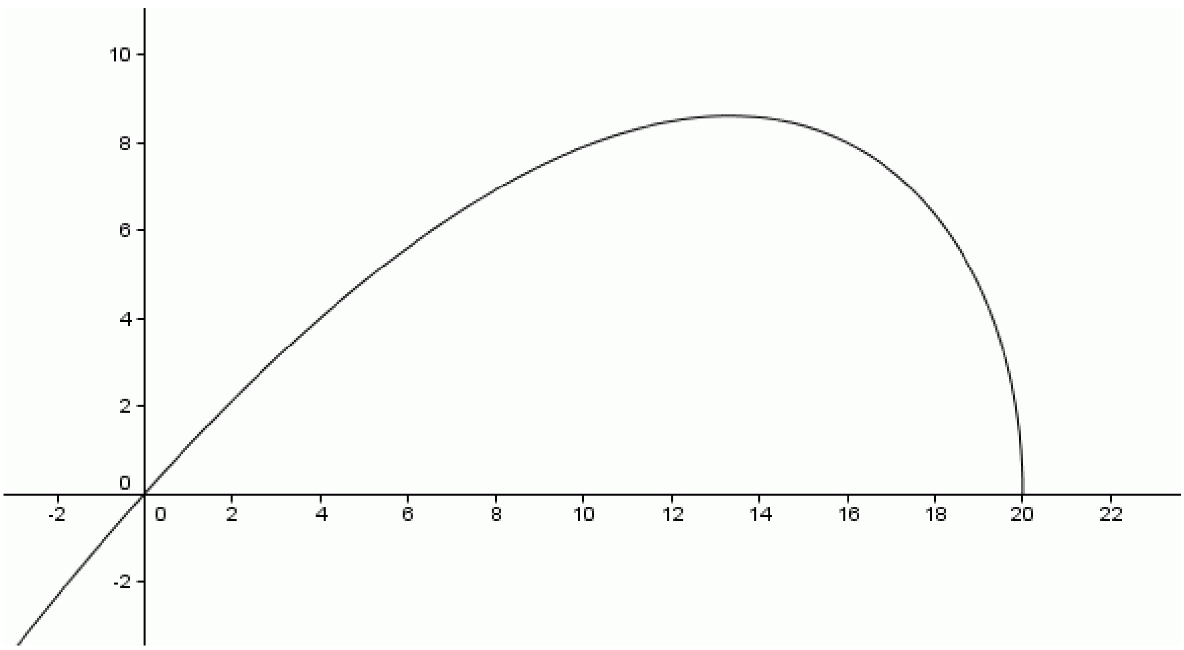
Das vorgegebene Koordinatensystem kann um 90° im Uhrzeigersinn gedreht werden.

Die Nullstellen von $f(x) = \frac{x}{4} \cdot \sqrt{20-x} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{20x^2 - x^3}$ sind zu berechnen.

$$f(x) = 0$$
$$\frac{x}{4} \cdot \sqrt{20-x} = 0$$
$$x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = 20$$

Die Höhe des Ballons beträgt 20m ab Brennerdüse bzw. 19m ab Brennerrahmen.

Skizze des oberen Querschnittprofils:



Aufgabe 2.2 (7 BE)

Länge des horizontalen Lastbandes:

$$f(x) = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{20x^2 - x^3} = \frac{1}{4}\cdot\left(20x^2 - x^3\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(20x^2 - x^3\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(40x - 3x^2\right)$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{x\cdot\left(40-3x\right)}{\sqrt{x^2\cdot\left(20-x\right)}}$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{40-3x}{\sqrt{20-x}}$$

$$f'(x) = 0$$
$$40 - 3x = 0$$
$$x = \frac{40}{3}$$

Radius des Ballonäquators:

$$r = f\left(\frac{40}{3}\right) = \frac{10}{3}\cdot\sqrt{\frac{20}{3}} \approx 8{,}607$$

Länge des Lastbandes:

$$u = 2\pi r = 2\pi\cdot\frac{10}{3}\cdot\sqrt{\frac{20}{3}} \approx 54{,}077$$

Die Länge des horizontalen Lastbandes am Ballonäquator beträgt ca. 54 m

Durchmesser *d* des Brennerrahmens:

$d = 2\cdot f(1) = 2\cdot\frac{1}{4}\sqrt{19} \approx 2{,}179$ *d* ist rund 2,18 m lang

Aufgabe 3 (11 BE)

$$
\begin{aligned}
V_x &= \pi \cdot \int_1^{20} \frac{1}{16} \cdot \left(20x^2 - x^3\right) dx \\
&= \pi \cdot \int_1^{20} \left(\frac{5}{4} x^2 - \frac{1}{16} \cdot x^3\right) dx \\
&= \pi \cdot \left[\frac{5}{12} x^3 - \frac{1}{64} x^4\right]_1^{20} \\
&= \pi \cdot \left[\frac{5}{12} \cdot 8000 - \frac{1}{64} \cdot 160000 - \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{64}\right)\right] \\
&= 832{,}932\pi \\
&\approx 2616{,}734
\end{aligned}
$$

Das Volumen des Ballons beträgt also ca. 2616,7 m^3.
Der Rotationskörper ist durch eine Randfunktion, in diesem Fall *f(x)* festgelegt. Zerlegt man die Fläche zwischen der Randkurve und der *x*-Achse in Rechtecke und lässt diese um die *x*-Achse rotieren, so erhält man Zylinder.

Die Summe der Zylindervolumina (Ober –bzw Untersumme) ist eine Näherung für das Volumen des Rotationskörpers.

Das exakte Volumen ergibt sich als Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty}$ der Ober- bzw. Untersumme der einzelnen Zylindervolumina.